

**Владимирский государственный университет**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ  
В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ СОПРОТИВЛЕНИЯ  
МАТЕРИАЛОВ И СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

**Составитель:  
Н. А. МАЛОВА**

**Владимир 2010**

## **Введение**

Настоящее издание включает задания, позволяющие освоить начала численных методов, научиться работать в программе MathCAD и самостоятельно решать ряд инженерных задач. Первое задание по исследованию функции помогает разобраться в задачах сопротивления материалов, требующих анализа эпюр и нахождения экстремальных значений усилий и перемещений. Нелинейные уравнения и методы итераций для их решения позволяют вычислять объемные напряженные состояния в конструкциях, решать задачи на устойчивость и др. Решение систем уравнений используется в решениях задач строительной механики методом сил и методом перемещений. Задание по вычислению и построению эпюр поперечных сил и изгибающих моментов является заключительным, позволяя закрепить полученные навыки в основах программирования, составлении матриц, построении графиков нескольких функций в одной системе координат и их форматировании.

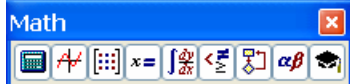
Задания индивидуальные и приведены в прил. 1. В прил. 2 рассматриваются примеры выполнения заданий, иллюстрированные необходимым графическим материалом.

Выполнение работ представляется преподавателю в электронном виде.

# 1. Теоретическая часть

## 1.1. Структура меню

MathCAD производит как символьные (точные), так и численные расчеты. Основная зона программы - рабочий лист, в который заносятся все необходимые вычисления. Помимо рабочего листа элементами окна являются: строка меню, панель инструментов и строка состояния (внизу).



Ввод числовых значений и символов возможен с клавиатуры, однако, MathCAD предлагает набор панелей Math, позволяющий вводить как числовые значения, так и математические символы. Всего имеется 9 панелей:



Calculator – калькулятор.



Graph – графики.



Matrix – матрицы.



Evaluation – вычисления.



Calculus – исчисление.



Boolean – булева.



Programming – программирование.

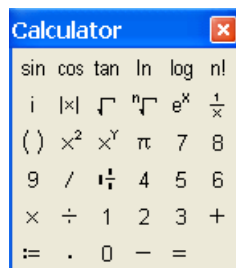


Greek – греческие символы.



Symbolic – символы.

Пояснения:



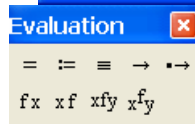
На панели Calculator находятся кнопки для ввода чисел, арифметических операций и некоторых функций (возведения в степень, логарифма, факториала и т.п.), а также кнопка := для присвоения определенного значения переменной или функции.



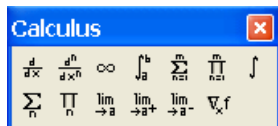
Панель Graph содержит инструменты для построения графиков.



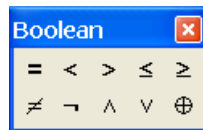
Панель Matrix позволяет вводить матрицы и оперировать с ними.



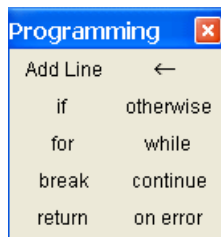
Панель Evaluation содержит кнопки для ввода операторов присвоения значений переменных и функций, кнопку со стрелкой для символического вычисления выражения и т.д.



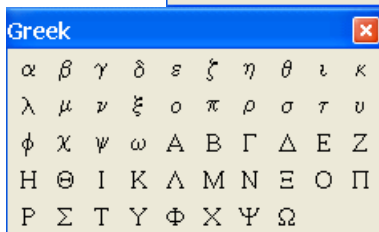
Панель Calculus позволяет вводить шаблоны математических символов (производных различного порядка, определенных и неопределенных интегралов, пределов, сумм и произведений).



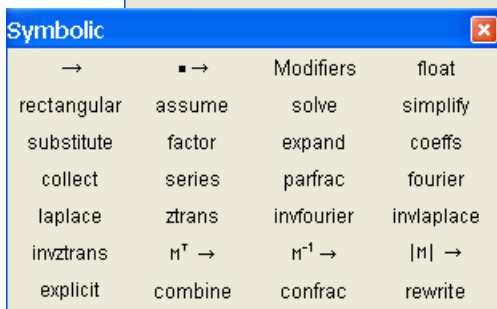
Панель Boolean содержит кнопки для ввода операторов сравнения (больше, меньше, равно) и логических операторов (и, или, не) и т.п.



Панель Programming содержит кнопки-операторы, позволяющие встраивать собственные программные функции.



Greek – панель ввода символов греческого алфавита.



Панель Symbolic содержит кнопки ввода функций для символических вычислений.

## 1.2. Основные соглашения при вводе данных и осуществлении математических операций

+ Для ввода и управления данными в зоне рабочего листа находится курсор. Курсор ввода имеет вид красного крестика и устанавливается мышью. При вводе данных курсор позволяет выделять один или несколько символов либо все выражение в целом. В этом случае его вид изменяется на уголок голубого цвета, размер которого регулируется клавишей «пробел», а перемещение по выражению осуществляется стрелками клавиатуры:

выделен символ  $x^2 - y + 2$

выделено все выражение  $x^2 - y + 2$

$x^2 - y + 2$

Всякое записанное выражение заключается в рамку, которая исчезает при выходе из него (щелкнуть вне записи). Для редактирования достаточно щелкнуть на выражении и внести необходимые изменения, используя курсор-уголок.

$x^2 - y + 2$   $x^2 - y + 2$

Перемещение выражения по рабочему листу осуществляется при помощи курсора в виде руки, который появится, если приблизиться указателем к краю рамки.

Прежде всего, следует знать, что формат ввода чисел предполагает отделение целой части от дробной при помощи точки. Ввод запятой в качестве разделителя будет считаться ошибочным. Символы, записанные в виде прописной и строчной буквы (X и x), являются для MathCAD двумя разными переменными. То же относится и к одинаковым символам русского и английского алфавитов (например, русская “а” и английская “a” различаются программой).

■ + ■ Математические символы, которые вводятся в рабочем листе при помощи панелей, содержат черные квадратики – шаблоны. Шаблоны упрощают ввод числовых значений или переменных, а также позволяют избежать лишних ошибок.

Вычисления происходят автоматически (как правило, функция автоматического вычисления включена и об этом свидетельствует сообщение «Auto» в строке состояния).

Вводимые символы и функции для дальнейших вычислений задаются при помощи оператора присвоения вида := (например,  $x:=5.5$  или  $f(x):=2x-1$ ).

Порядок записи ведется сверху вниз и слева направо, поскольку именно в таком направлении осуществляется чтение всех выражений программой.

Для простых арифметических вычислений или вычислений с определенными выше переменными достаточно записать выражение и ввести знак “=”. Например, если переменная  $x$  определена выше  $x:=2$ , то выражение, включающее данную переменную, можно запустить на счет:

$$x^2 - 3x = -2$$

Если в уравнение или неравенство входит переменная, не определенная выше, обычное “=” следует заменить на жирное (вводится из панели Boolean или комбинацией клавиш Ctrl =):

$$x^2 - 3x = 5$$

Точностью вычислений и форматом отображения результата управляет системная переменная *Floating Point* (она задается в меню *Symbolics – Evaluate*). По умолчанию ее значение равно 20. Диалоговое окно доступно только при выделенном выражении (результате).

Размещением результатов управляет диалоговое окно *Evaluation Style* (меню *Symbolics*). Результаты можно разместить вертикально или горизонтально по отношению к исходному выражению, либо заменить выражение результатом. Здесь же назначаются комментарии, сопровождающие выполнение команд.

### 1.3. Символьные вычисления

Для простых символьных вычислений и преобразований следует использовать меню *Symbolics* или аналогичную панель.

Например, для нахождения корня квадратного уравнения следует использовать функцию *solve* (решить):

$$x^2 - 2x = 8 \text{ solve} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Если уравнение содержит два или более неизвестных параметров, необходимо после запятой уточнить поиск для решения уравнения:

$$x - 2y = 8 \text{ solve, } x \rightarrow 2 \cdot y + 8$$

В том случае, если вывод решения представляет собой арифметическое выражение, можно дополнительно применить вывод в десятичном формате при помощи функции *float* (вывод в десятичном формате с плавающей точкой). Количество знаков вывода следует указать после функции *float*:

$$x^2 - 2x = 5 \text{ solve} \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{6} + 1 \\ 1 - \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$x^2 - 2x = 5 \left| \begin{array}{l} \text{solve} \\ \text{float}, 4 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 3.449 \\ -1.449 \end{pmatrix}$$

Команды меню *Symbolics* предназначены как для выполнения операций с выражениями в целом (они находятся в основном списке меню), так и для операций с переменными (подменю *Variable*). Для выполнения команд, работающих с выражениями, необходимо выделить все выражение. Например, требуется разложить на множители левую часть уравнения. Для этого выделяем левую часть и выбираем команду *Factor* (разложить на множители):

$$\boxed{x^2 - 5x + 6}$$

$$(x - 2) \cdot (x - 3)$$

Применение команд подменю *Variable* требует выделения только переменной, относительно которой производятся вычисления (в противном случае подменю просто недоступно). Например, для нахождения производной (команда *Differentiate*) необходимо выделить переменную, относительно которой находится производная.

Пример нахождения производной относительно переменной *t* с применением комментариев и горизонтальным размещением результата (назначается в диалоговом окне *Evaluation Style* меню *Symbolics*):

$$x^3 - 3xt + 2t^2 \quad \text{by differentiation, yields} \quad -3x + 4t$$

Для вычисления интегралов, пределов, дифференциалов и т.п. предназначена панель *Calculus*. Сначала вводится необходимый шаблон и заполняется. Для получения результата используется стрелка вычисления символьных выражений (панель *Evaluation* или комбинация клавиш *Ctrl .*)

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 3x) \rightarrow 2 \cdot x - 3$$

Часто в функциях применяются переменные, которые должны принимать ряд фиксированных значений. Такие переменные называются ранжированными. Формат задания значений таким переменным:

$$a[,a+h]..b$$

где  $a$ ,  $b$  – область значений переменной;  $h$  - шаг. Если задается ранжированная переменная вида:

$$x := 1..10$$

это означает, что  $x$  принимает значения от 1 до 10 с шагом 1. Для шага, не равного 1, необходимо задать формат:

$$x := 1, 1.1..10$$

Шаг суммируется с начальным значением и записывается после него через запятую. Здесь шаг равен 0.1. Не следует забывать, что при убывающем ранге ( $b < a$ ) шаг должен быть отрицательным, т.е. второе записываемое значение будет меньше первого. Двоеточие вводится при помощи клавиши « : » (там же русская буква Ж), либо шаблоном `p..m`, который находится на панели Matrix.

#### 1.4. Построение двумерных графиков

При построении графиков также используют ввод шаблона-графика при помощи панели Graph, или комбинацию клавиш Shift-2. Удобнее сначала ввести функцию, выделить ее, затем щелкнуть Shift-2 или по кнопке X-Y Plot (панель Graph). Простой щелчок вне графика автоматически построит кривую.

Любой построенный график редактируется при помощи диалогового окна *Format*, которое можно вызвать из контекстного меню, щелкнув правой кнопкой мыши в области графика. Диалоговое окно имеет несколько вкладок, в том числе управляемых настройкой системы координат (X-Y Axes), отображением графиков (Traces), подписями (Labels) и др.

Увеличением изображения управляет диалоговое окно ZOOM (вызывается из контекстного меню или панели Graph). Чтобы укрупнить фрагмент графика, надо выделить мышью область укрупнения и щелкнуть на кнопке Zoom.

Для того чтобы построить несколько кривых в одной системе координат, следует уголком голубого курсора выделить первую функцию на графике и ввести запятую, появится шаблон для ввода второй функции (рис. 1). Если каждая функция имеет свой аргумент, следует через запятую ввести по порядку и аргументы.



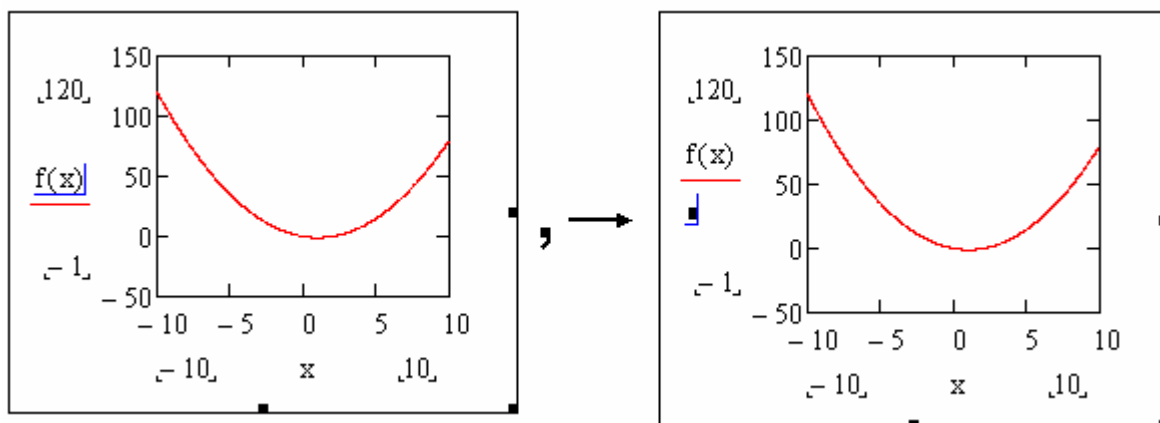


Рис.1 Ввод второй функции в области графика

Для изменения пределов ординаты и абсциссы следует щелкнуть на уже существующих пределах графика и отредактировать их.

Если независимой переменной, являющейся аргументом функции, присвоено конкретное значение, график не будет построен. В этом случае следует отменить присвоение либо построить график выше присвоения, либо задать другой аргумент.

Часто для нескольких графиков функций в одной системе координат требуется аргумент, принимающий значение в разных областях числовой оси. Например, при построении эпюр по участкам одного стержня с разными функциональными зависимостями. Для этого используют ранжированные переменные, определенные заранее.

Допустим, первая функция имеет зависимость  $f_1(x)=2 \cdot x+6$  ( $0 < x < 2$ ), а вторая функция  $f_2(x)=10-x$  ( $0 < x < 3$ ). Чтобы получить обе зависимости в одной системе координат, заменим аргументы на  $x_1$  и  $x_2$  и зададим их как ранжированные переменные (шаг 0.1):

$$x_1 := 0, 0.1.. 2 \quad x_2 := 0, 0.1.. 3 \quad f_1(x_1) := 2x_1 + 6 \quad f_2(x_2) := 10 - x_2$$

Поскольку на числовой оси  $x_2$  следует за  $x_1$ , обеспечим стыковку двух функций на графике, задав второй аргумент  $x_2$  от конечного значения предыдущего аргумента  $x_1$  (рис.2):

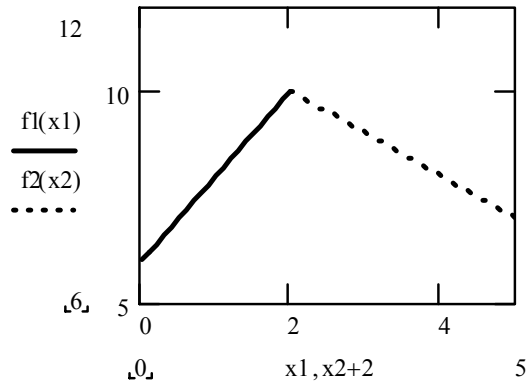


Рис.2 Построение графиков двух функций с разными аргументами

### 1.5. Вычислительные блоки Given – Find, Given – Minerr

Функции Find и Minerr предназначены для решений уравнений, неравенств и систем уравнений. Их можно ввести с клавиатуры либо вставить из списка функций. Значок диалогового окна вставки функции находится на стандартной панели. Обе функции предваряются ключевым словом *Given*.

Функция *Find* решает систему так, чтобы левые и правые части входящих в нее уравнений отличались на величину, не превышающую значения TOL (по умолчанию системная переменная TOL=0.001, однако ее всегда можно переопределить). Функция *Minerr* (MINimal ERRor) ищет приближенное решение путем минимизации среднеквадратичной погрешности. Результат вычислений осуществляется по стрелке символьных вычислений. Если вычисляется несколько переменных, они выводятся в матричном виде.

К особенностям работы с данными блоками отнесем следующее:

- вычислительный блок охватывает все горизонтальное пространство рабочего листа, поэтому всякое написание параллельно блоку посторонних выражений будет считаться встроенным в блок и повлечет за собой ошибки;
- не допускается применение в одном блоке обеих функций;
- найденные значения не присваиваются искомым переменным, поэтому при необходимости присвоение результата следует выполнить самостоятельно (ниже вычислительного блока).

Пример решения системы уравнений с двумя неизвестными:

Given

$$2x - 5y = 12$$

$$7x + 4y = -1$$

$$\text{Find } (x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

## 1.6. Элементы программирования

Помимо встроенных функций MathCAD позволяет создавать собственные функции, в которых используются операторы программирования, расположенные на панели Programming. Создаваемый программный блок отделяется вертикальной чертой, которая образуется кнопкой *Add line*. Операторы программирования имеют свою конструкцию, которая появляется в шаблонном виде при вводе их при помощи панели Programming (не рекомендуется вводить операторы самостоятельно с клавиатуры во избежание ошибок).

**while** - ввод цикла с предпроверкой с двумя пустыми шаблонами  
while ■  
■  
■  
справа и внизу. В правый шаблон записывается булево выражение (переменная), в нижний - тело цикла. Если в теле цикла более одного оператора, добавляется дополнительный шаблон кнопкой *Add line*.

**if** - ввод условия. Имеет формат  
■ if ■

**otherwise** - совместно с условием **if** - блок условия с альтернативой

**for** - блок для ввода цикла с параметром. В строке **for** записываются границы значений параметра (как правило, в виде ранжированной переменной), ниже шаблон предназначен для ввода тела цикла.

for ■ ∈ ■

■

**break** - досрочный выход из программы или цикла.

**continue** - продолжение цикла;

**return** - возврат из программы;

**on error** - инструкция по обработке ошибок.

Порядок составления программы:

- задается имя функции и в скобках перечисляются все переменные параметры, от которых зависит ее значение (символы локальных переменных должны быть точно такие же, как в программном блоке);
- ставится знак присвоения и вводится программный блок.

Для вычисления значения функции необходимо ниже программного блока ввести ее имя, а в скобках перечислить значения переменных.

Рассмотрим пример составления функции изгибающего момента, действующего в балке с приложенной поперечной силой. В качестве искоемых параметров принимаются: длина балки **L**, расстояние от точки приложения силы до левой опоры **a**, величина поперечной силы **F** и расстояние до искомого сечения **x**. Для расчета примем силу положительной. Реакции рассчитывает сама программа. Поскольку момент имеет две функциональ-

ные зависимости (до точки приложения силы и после точки приложения), в блоке используется условие оператором if. Учтены оператором return два ограничения для ввода параметров  $x$  и  $a$ : они не должны быть отрицательными или превышать длину балки (причем  $x$  может быть равен 0 или  $L$ , для параметра  $a$  равенство 0 или  $L$  приведет к нулевым значениям момента, поскольку сила будет приложена в опоре). Знак  $\vee$  является логическим “или” и находится на панели Boolean.

$$M(x, F, a, L) := \begin{cases} \frac{-F \cdot (L - a)}{L} \cdot x & \text{if } 0 \leq x \leq a \\ \frac{-F \cdot (L - a)}{L} \cdot x + F \cdot (x - a) & \text{if } a \leq x \leq L \\ \text{return "Error input! x out of L!"} & \text{if } x > L \vee x < 0 \\ \text{return "Error input! a out of L!"} & \text{if } a \leq 0 \vee a \geq L \end{cases}$$

Полученная функция позволит вычислить значения момента в любом сечении балки, если вместо  $x$  задать конкретное значение. Если задать  $x$  в виде ранжированной переменной от 0 до  $L$ , то можно получить значения момента во всех существующих точках  $x$ , а также построить эпюру. Например, при  $x = 0.5$  м,  $a = 1$  м,  $F = 4$  кН,  $L = 2$  м, получим следующее решение:  $M(0.5, 4, 1, 2) = -1$

Если задать значения для  $x$  с шагом в 0.5 м, то получим значения момента в 5 сечениях (на рис. 3 построена эпюра момента по 5 значениям  $x := 0, 0.5 \dots L$ ).

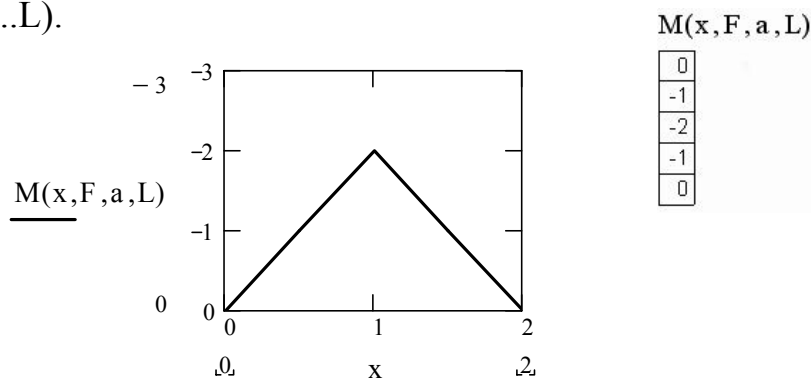


Рис. 3. Построение эпюры момента по функции-программе

## 1.7. Численное решение нелинейных уравнений

Многие уравнения не решаются аналитически, поэтому для их решения применяются численные методы. Это означает, что ищется приближенное решение  $f(x) = 0$  с заданной погрешностью. Наиболее распространенными являются итерационные методы (т.е. методы последовательных приближений):

- простейший итерационный метод по начальному приближению корня  $x_0$ ;
- метод половинного деления;
- метод секущих, или метод линейной интерполяции;
- метод касательных, или метод Ньютона.

Рассмотрим подробнее метод Ньютона. Пусть на отрезке  $[a, b]$  содержится единственный корень  $x = \alpha$  уравнения  $f(x) = 0$ , а функция имеет непрерывные производные  $f'(x)$  и  $f''(x)$ , которые не обращаются в 0 на данном отрезке. Проведем касательную к функции в некоторой точке  $x_1$ ,  $y_1$  внутри интервала  $[a, b]$ . Уравнение касательной:  $y - y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$

Поскольку  $y_1 = f(x_1)$ , получим для точки пересечения касательной с осью  $x$  ( $y=0$ ):

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (1)$$

Это означает, что существует такая окрестность точки  $x = \alpha$ , что последовательность

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

будет сходиться к  $x = \alpha$ .

Программа MathCAD предусматривает несколько способов и методов решения нелинейных уравнений. Поскольку все численные функции выдают результат с некоторой погрешностью, необходимо заранее задать ее величину. Погрешность регулируется системной переменной TOL, которая по умолчанию равна 0.001. Ее значение можно переопределить в рабочем листе, либо задать в диалоговом окне математических опций (меню *Tools* – пункт *Worksheet Options*).

Функция **root**( $f(x), x, [a, b]$ ), где  $f(x)$  - заданная функция,  $x$  – аргумент,  $a, b$  – интервал, в котором ищется корень функции  $f(x)$ . Функция **root** предполагает предварительное построение графика и определение интервала, внутри которого имеется одно пересечение с осью абсцисс.

Функция **polyroots**( $v$ ) для нахождения корней полинома. Решается относительно вектора  $V$  коэффициентов полинома (первый элемент вектора является коэффициентом при  $x^0$ , далее по возрастанию порядка степени аргумента).

Вычислительные блоки с функциями **Find** или **Minerr** со следующей структурой:

- начальные условия (задается начальное значение искомой переменной – некоторая опорная точка);
- открытие блока ключевым словом Given;

- запись уравнения в виде приближенного равенства (используется знак жирного “=”)
- выражения с функциями Find или Minerr.

Пример блока Given - Find (блок Given – Minerr строится по тому же принципу):

$$\begin{aligned}
 & x := 1 \\
 & \text{Given} \\
 & e^x - x^3 = 0 \\
 & x0 := \text{Find} (x) \\
 & x0 = 1.857
 \end{aligned} \tag{3}$$

Кроме того, итерационный метод можно записать в виде программного блока. Функция вычисления корня нелинейного уравнения по методу Ньютона (см. формулы 1 и 2) может быть записана следующим образом:

$$\text{Newton}(f, x) := \left| \begin{array}{l} x1 \leftarrow x + 2 \cdot \text{TOL} \\ \text{while } |x1 - x| > \text{TOL} \\ \quad \left| \begin{array}{l} x \leftarrow x1 \\ x1 \leftarrow x - \frac{f(x)}{\frac{d}{dx} f(x)} \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{4}$$

Для нахождения корня необходимо построить график функции, определить интервал поиска, задать выражение  $f(x)$ , после чего ввести стартовое значение переменной в качестве параметра  $x$  функции Newton.

## 1.8. Операции с матрицами

Матрица является упорядоченным массивом, поэтому каждый элемент этого массива имеет свой индекс. Нумерацией индексов управляет функция ORIGIN, которая имеет значение, соответствующее первому порядковому номеру элемента матрицы. По умолчанию это значение равно 0. Это означает, что первый элемент матрицы нулевой.

Матрицы подразделяются на матрицу-вектор (один столбец и  $m$  строк), матрицу-скаляр (однострочную матрицу) и двумерную матрицу-массив, состоящую из  $m \times n$  строк и столбцов. Одним из способов создания матрицы является вставка шаблона командой Matrix (меню *Insert* или панель Matrix). Максимальное количество ячеек, которое позволяет созда-

вать шаблон матрицы, равен 100. Создание матрицы по шаблону осуществляется в два этапа: сначала в диалоговом окне определяется количество строк (rows) и количество столбцов (columns), затем в появившемся шаблоне матрицы вводятся значения элементов. Переход от одного значения (или шаблона) к другому осуществляется стрелками клавиатуры или мышью.

Другой способ задания матрицы - поэлементный. Количество ячеек в этом случае может быть более 100. Например, для создания квадратной матрицы 2-го порядка следует задать 4 элемента:

$$K_{0,0} := 1 \quad K_{0,1} := 2 \quad K_{1,0} := 3 \quad K_{1,1} := 4 \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Элемент матрицы записывается с нижними индексами, которые указывают на номер строки (первый индекс) и номер столбца (второй индекс). Элемент матрицы-вектора записывается с одним индексом. Ввод индекса осуществляется при помощи шаблона панели Matrix или Calculator, либо клавишей “[“.

На панели Matrix имеется кнопка для ввода шаблона матрицы, кнопка шаблона для ввода обратной матрицы ( $x^{-1}$ ); для выделения столбца матрицы номер указывается в угловых скобках ( $M \langle n \rangle$ ); шаблон для вычисления транспонированной матрицы ( $M^T$ ); шаблон для вычисления определителя матрицы ( $|x|$ ) и т.д.

Некоторые функции характеристик матриц:

**cols(A)** – возвращает число столбцов матрицы A;

**rows(A)** – возвращает число строк матрицы A;

**mean(A)** – вычисляет среднее значение элементов матрицы A.

Функции формирования матриц:

**identity(n)** формирует единичную матрицу  $n \times n$ :

$$\text{identity}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**stack(A,B,C...)** объединяются матрицы с равным количеством колонок сверху вниз:

$$A1 := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix} \quad A2 := (-2 \ 0 \ 11 \ 4) \quad \text{stack}(A1, A2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \\ -2 & 0 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

**augment(A,B,C...)** объединяет матрицы с равным количеством строк бок о бок (слева направо):

$$B1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B2 := \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{augment}(B1, B2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Выделение части матрицы с указанием количества строк и столбцов осуществляется функцией

$submatrix(A, ir, jr, ic, jc)$ , где  $A$  – основная матрица,  $ir, jr$  (записывается числом) – порядковые номера строк выделенной матрицы (естественно,  $jr > ir$ );  $ic, jc$  – то же, колонок.

Функции, реализующие численные алгоритмы решения задач линейной алгебры:

$rref(A)$  – выполняет элементарные операции со строками (приводит матрицу к ступенчатому виду с единичным базисным минором);

$eigenvals(A), eigenvecs(A)$  – вычисление соответственно собственных значений и собственных векторов квадратной матрицы  $A$ ;

$lsolve(A, B)$  – решение системы линейных алгебраических уравнений  $A \cdot x = B$ .

### 1.9. Решение систем линейных уравнений

Подробнее рассмотрим матричный метод решения систем алгебраических уравнений на примере четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + a_{14} \cdot x_4 = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + a_{24} \cdot x_4 = b_2$$

$$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 + a_{34} \cdot x_4 = b_3$$

$$a_{41} \cdot x_1 + a_{42} \cdot x_2 + a_{43} \cdot x_3 + a_{44} \cdot x_4 = b_4$$

Система в свернутом виде может быть записана

$$\sum_{i=1}^4 a_{i,j} \cdot x_i = b_j, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

В соответствии с правилом умножения матриц (если  $C = A \cdot B$ , то  $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$ ) рассмотренная система уравнений может быть записана в матричном виде  $A \cdot x = B$ , где  $A$  – матрица системы, столбцами которой являются коэффициенты при соответствующих неизвестных  $x_i$ , а строками – коэффициенты при неизвестных в соответствующем уравнении;  $B$  – матрица–столбец, элементами которой являются правые части уравнений (матрица правой части);  $x$  – матрица–столбец, элементами которой являются искомые неизвестные (решение системы).

Если матрица системы невырожденная (определитель матрицы отличен от нуля), то система уравнений имеет единственное решение.

К точным решениям следует отнести метод Крамера:

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \quad j = 1 \dots n,$$



где  $\det A_j$  - определитель матрицы, получаемый заменой  $j$ -того столбца матрицы  $A$  столбцом правых частей.

В программе MathCAD решение систем линейных уравнений матричным способом реализовано следующим образом.

Функцией **Isolve(A,B)**, которая возвращает решение системы в векторном виде. До выполнения функции должна быть сформирована матрица системы  $A$  и вектор правой части  $B$ . В явном виде решение также можно записать:

$$x := A^{-1} \cdot B \quad (5)$$

Решение системы уравнений методом Гаусса осуществляется при помощи функции **rref(C)**. Для того чтобы функция нашла решение, необходимо объединить матрицу системы  $A$  и матрицу правой части  $B$  функцией **augment**. Запись решения:

$$C := \text{augment}(A, B)$$

$$x := \text{rref}(C) \langle n \rangle \quad (6)$$

Последний столбец матрицы  $C$  (его порядковый номер  $n$ ) и есть решение системы.

## 1.10. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

К обыкновенным дифференциальным уравнениям относятся уравнения, содержащие одну независимую переменную. В общем виде уравнения могут быть записаны как  $F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$ , где  $x$  - независимая переменная. Наивысший порядок  $n$  входящей в уравнение производной называется порядком дифференциального уравнения.

Решением ОДУ называется всякая функция  $y = \varphi(x)$ , которая после ее подстановки в уравнение превращает его в тождество.

Решение в общем виде:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

Частное решение получается из общего, если произвольным постоянным  $C_1, C_2, \dots, C_n$  придать определенные значения. Для выделения частного решения из общего следует задавать столько дополнительных условий, сколько произвольных постоянных в общем решении, т.е. каков порядок уравнения. Если эти условия задаются в одной точке, то такая задача называется задачей Коши. Дополнительные условия в задаче Коши называются начальными условиями, а точка  $x = x_0$ , в которой они задаются, - начальной точкой.

Одним из наиболее точных методов численного решения ОДУ является метод Рунге – Кутты. Метод является одношаговым, решаемым по схемам различных порядков точности. Порядок определяется порядком точности по шагу  $h$  на сетке. Схема Рунге-Кутты 4-го порядка точности:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} \cdot (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)$$

$i = 0, 1, \dots, k$  – коэффициенты, которые определяются следующим образом:

$$k_0 = f(x_i, y_i)$$

$$k_1 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}\right)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i + k_2)$$

Программа решения для нахождения пошаговых значений  $y$ , реализованная в MathCAD, для ОДУ 1 порядка:

```
rk4(y0, a, b, n, f) :=
| y1 ← y0
| x1 ← a
| h ← (b - a) / n
| for i ∈ 2 .. n + 1
|   | k1 ← f(x_{i-1}, y_{i-1})
|   | k2 ← f(x_{i-1} + h/2, y_{i-1} + h/2 · k1)
|   | k3 ← f(x_{i-1} + h/2, y_{i-1} + h/2 · k2)
|   | k4 ← f(x_{i-1} + h, y_{i-1} + h · k3)
|   | y_i ← y_{i-1} + h/6 · (k1 + 2 · k2 + 2 · k3 + k4)
|   | x_i ← x_{i-1} + h
| Y ← augment(x, y)
```

(7)

Здесь  $y_0$  – начальное значение функции при  $x_0 = a$ ;  $[a, b]$  – интервал интегрирования;  $n$  – заданное количество шагов на интервале;  $f(x, y)$  – уравнение первой производной.

ОДУ высших порядков для численного решения функциями MathCAD должны быть представлены задачей Коши в векторной форме. Само решение функциями выдается в табличном и графическом виде.

Рассмотрим решение на примере дифференциального уравнения 2-го порядка при помощи функции **rkfixed** (решение Рунге-Кутты 4-го порядка точности с фиксированным шагом).

Математическая постановка задачи сводится к представлению вектора начальных условий и вектора системы ОДУ. Предварительно уравнение должно быть преобразовано в систему уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} y_1 &= y(x); \\ y_2 &= y'(x); \\ y_2' &= f(x, y_1, y_2) = y(x)''; \end{aligned}$$

определен вектор начальных условий  $y$ :

$$y = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \end{pmatrix} \quad (8)$$

и векторная функция правых частей уравнения  $D(x, y)$ :

$$D(x, y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y'(x, y_1, y_2) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Формат функции **rkfixed**( $y, x_0, x_k, Npoints, D$ ) включает определенный выше вектор начальных условий  $y$ , начальное  $x_0$  и конечное  $x_k$  значения интервала интегрирования, количество расчетных точек  $Npoints$  и векторную функцию правых частей  $D(x, Y)$ . Численное решение уравнения получаем в виде матрицы, которая содержит в первом столбце координаты  $N$  узлов равномерной сетки на отрезке  $[x_0, x_k]$ , во втором – приближенные значения решения в этих узлах функции, в третьем – первой производной.

Функция **rkadapt** решает уравнение методом Рунге-Кутты с автоматическим подбором шага.

Численные методы Булирша-Штера и алгоритма Розенброка для жестких систем представлены рядом функций (**bulstoer**, **stiff**, **stiffb**), также использующих векторное представление всех параметров.

Исключением векторного представления уравнения в MathCADe является функция **odesolve**, позволяющая запись уравнения в символьном

виде. Перед обращением к функции необходимо записать ключевое слово `Given`, затем ввести уравнение и начальные условия.

Формат функции `odesolve(x, b[step])` требует указать конечное значение интервала интегрирования `b`. Шаг `Step` является необязательным, но при его указании функция решает уравнение методом Рунге-Кутты с фиксированным шагом.

## 2. Практические задания

### Задание 1. Исследование функции

*Цель работы:* научиться выполнять в программе MathCAD несложные математические вычисления (нахождение корней функции, производных), строить и оформлять двухмерные графики на примере исследования функции.

Индивидуальное задание взять из прил. 1, табл. 1 согласно номеру варианта, выданному преподавателем.

Пример выполнения задания приведен в прил. 2.

#### *Указания к выполнению задания*

- Присвоить выражение функции  $f(x)$ .
- Найти область определения функции.
- Найти точки пересечения функции с осью абсцисс (корни функции) и осью ординат  $f(0)$ . Для нахождения корней функции использовать команду *Solve* подменю *Variable* меню *Symbolics* или команду *Solve* панели *Symbolic*.
- Исследовать функцию на экстремальные значения при помощи первой производной. Для этого найти первую производную и ее критические точки: корни производной и возможные точки разрыва. Исследовать найденные точки на максимум и минимум. Если значения производной слева направо от критической точки меняют знак с “-“ на “+”, точка является минимумом. Если производная меняет свой знак с “+” на “-“, то это максимум; и наконец, точка не является ни максимумом, ни минимумом, если слева и справа от нее производная одного знака. Найти интервалы возрастания и убывания функции.
- Исследовать функцию на выпуклость, вогнутость и точки перегиба. Для этого вычислить вторую производную и найти ее критические точки (корни второй производной и возможные точки разрыва). Определить знак второй производной в полученных областях между критиче-

скими точками. Если вторая производная положительна, то данная область функции является вогнутой, если отрицательна – функция выпуклая. При смене знака второй производной при переходе через свою критическую точку будем считать ее точкой перегиба, если знак не меняется, данная критическая точка перегибом функции не является.

- Построить все необходимые графики функции. На графике должны быть показаны корни функции, точки минимума и максимума, точки перегиба. Для наглядности следует построить несколько графиков в разных масштабах с указанием тех или иных точек. Оформление графика производится в диалоговом окне *Format* (вызывается из контекстного меню графика, если щелкнуть правой кнопкой мыши в области графика). Все необходимые точки на графике можно указать при помощи маркеров (пункт *Format* контекстного меню, закладка *X-Y Axes*). В настройке оси *X* выбрать пункт *Show Markers* – показать маркеры. После выполнения настроек формата графика под осью *X* появятся два черных квадратика – шаблона. Выделите их последовательно курсором и введите необходимые значения точек. Для укрупнения изображения воспользуйтесь окном *Zoom* (панель *Graph* или контекстное меню).
- Ввести все необходимые текстовые пояснения. Текстовый регион вводится при помощи меню *Insert – Text Region*. Иначе можно перейти в текстовую область, если после ввода одного или нескольких символов нажать на клавишу пробела.

## Задание 2. Решение нелинейных уравнений

*Цель работы:* Овладеть навыками численного решения нелинейных уравнений и применения методов программирования.

Индивидуальное задание взять из прил. 1, табл. 2 согласно номеру варианта, выданному преподавателем.

Пример выполнения задания приведен в прил. 2.

### Указания к выполнению задания

- Построить график заданной функции и определить интервалы, внутри которых функция имеет единственный корень.
- Задать погрешность вычисления.
- Найти корни при помощи функции *root* (см. п. 1.7).
- Найти корни при помощи вычислительного блока *Given – Find* (формула (3)). Если уравнение представляет собой полином, вместо блока *Given – Find* использовать функцию *polyroots* (см. п. 1.7).

- Самостоятельно составить программные блоки для вычисления корней методом половинного деления и по методу Ньютона (формула (4)) и найти все корни.
- Сравнить полученные результаты. На графике показать все найденные корни уравнения.

### Задание 3. Решение системы линейных уравнений

*Цель работы:* на примере системы уравнений с 4 неизвестными научиться средствами MathCAD формировать в матричном виде систему уравнений и применять различные методы для ее решения.

Индивидуальное задание взять из прил. 1, табл. 3 согласно номеру варианта, выданному преподавателем.

Пример выполнения задания приведен в прил. 2.

#### *Указания к выполнению задания*

Решение систем линейных уравнений вида:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + a_{14} \cdot x_4 = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + a_{24} \cdot x_4 = b_2$$

$$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 + a_{34} \cdot x_4 = b_3$$

$$a_{41} \cdot x_1 + a_{42} \cdot x_2 + a_{43} \cdot x_3 + a_{44} \cdot x_4 = b_4$$

- Назначить системную переменную  $ORIGIN = 1$ .
- Выполнить подстановку неизвестного  $N$ , заменив его номером варианта при помощи команды *Substitute* (меню *Symbolics – Variable*) и сформировать систему уравнений согласно варианту.
- После создания матрицы системы  $A$  (ее размер  $4 \times 4$ ) и матрицы правой части  $B$  ( $4 \times 1$ ) проверить определитель матрицы  $A$ :

$$|A| \rightarrow$$

- Если определитель не равен нулю, решить систему методом Крамера, создав функцию-программу.
- Решить систему при помощи функций *Lsolve*, а также матричным уравнением (формула (5)).
- Для проверки матричного решения применить вычислительный блок *Given – Find* (см. пример в п. 1.5).

#### **Задание 4. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка**

*Цель работы:* средствами MathCAD применить численные методы для решения обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Индивидуальное задание взять из Приложения 1, табл. 4, согласно номеру варианта, выданному преподавателем.

Пример выполнения задания приведен в Приложении 2.

#### *Указания к выполнению задания*

- Задать системную переменную  $ORIGIN = 1$
- Задать шаг аргументу
- Численно получить решение уравнения в графической и табличной форме, используя функции `odesolve` и `rkfixed`. Для функции `rkfixed` предварительно составить вектор начальных условий

$$y = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \end{pmatrix}$$

и вектор правых частей

$$D(x, y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y'(x, y_1, y_2) \end{pmatrix}$$

- Сравнить полученные решения в табличной и графической форме.

#### **Задание 5. Расчет на прочность статически определимой балки при плоском поперечном изгибе**

*Цель работы:* применить полученные навыки в программировании, составлении матриц, построении графиков на примере вычисления внутренних усилий в балке, построении их графических зависимостей (эпюр) и вычислении максимального значения изгибающего момента для выполнения расчета на прочность.

Индивидуальное задание взять из прил. 1, табл. 5 согласно номеру варианта, выданному преподавателем.

Пример выполнения задания приведен в прил. 2.

### *Указания к выполнению задания*

- Все внешние нагрузки задать в матричном виде, используя математическое правило знаков при учете направления нагрузки
- Вычислить опорные реакции
- Составить функции-программы для нахождения поперечных сил и изгибающих моментов
- Построить, используя полученные аналитические зависимости, эпюры поперечных сил и изгибающих моментов
- Подобрать двутавровое сечение балки из расчета на прочность, предварительно определив максимальное значение изгибающего момента.



## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Приложение 1

#### Варианты заданий

##### Задание 1. Исследование функции

Найти область определения и корни функции, экстремальные значения, точки перегиба, участки возрастания-убывания и выпуклости-вогнутости. Построить графики функции с указанием всех характерных значений. Данные взять из табл. 1.

Таблица 1

Вариант	$F(x)$	Вариант	$F(x)$
1	$\frac{4x^2 + 5}{3x + 8} - 4$	11	$\frac{4 \cdot x}{x^2 + 4}$
2	$\frac{17 - x^2}{x - 5}$	12	$8x^2 + \frac{8}{x} - \frac{x^2}{2}$
3	$4 - x^2 - \frac{4}{x^2}$	13	$\sqrt[3]{2x^2 \cdot (x - 6)}$
4	$\frac{3 \cdot x^2 - x + 2}{2 - 3 \cdot x^2} - 1$	14	$1 - \sqrt[3]{x^3 - 2x}$
5	$\frac{x^3 - x}{3x^2 - 4}$	15	$\frac{12 \cdot \sqrt[3]{6 \cdot (x - 1)^2}}{(x + 1)^2 + 8}$
6	$\sqrt[3]{2 \cdot (x - 2)^2 \cdot (8 - x)} - 4$	16	$9 \cdot \sqrt[3]{(x + 1)^3 - 8}$
7	$\frac{x^2 - 3}{\sqrt{4x^2 + 1}}$	17	$\frac{6 \cdot \sqrt[3]{6 \cdot (x - 3)^2}}{(x - 1)^2 + 8}$
8	$x^2 + \frac{16}{x^2} - 16$	18	$\frac{8 \cdot (x - 1)}{(x + 1)^2}$
9	$\sqrt[3]{2(x - 1)^2 \cdot (x - 7)}$	19	$(x + 1) \cdot e^{x+2}$
10	$\frac{10x}{x^2 + 1} - 3$	20	$\frac{5x}{x^2 + 3}$

<b>21</b>	$\frac{x^2 - 6x + 4}{3x - 2}$	<b>31</b>	$\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2$
<b>22</b>	$2 - x^2 - \frac{4}{(x+2)^2}$	<b>32</b>	$\frac{x^3 - 27x + 54}{x^3}$
<b>23</b>	$\sqrt[3]{2x^2 \cdot (x-3)}$	<b>33</b>	$\frac{3 \cdot \sqrt[3]{6x^2}}{(x+2)^2 + 8}$
<b>24</b>	$\frac{2 \cdot (7x - x^2 - 7)}{x^2 - 2x + 2} - 1$	<b>34</b>	$\frac{(1-x^2) \cdot 3}{4x - 5}$
<b>25</b>	$2 - \sqrt[3]{2 \cdot (2-x)^2 \cdot (5-x)}$	<b>35</b>	$\frac{x^3 - 4}{3x^2 - 4}$
<b>26</b>	$\frac{3x^3 - 2 \cdot (x^2 - 5)}{x - 7}$	<b>36</b>	$\frac{\sqrt[3]{(x-3)^2 - 2}}{x - 1}$
<b>27</b>	$\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^3$	<b>37</b>	$\left(\frac{x^2}{x} - 5x\right) + \frac{3}{(x-1)^2}$
<b>28</b>	$\left(\frac{x+2}{x-5}\right)^3 + 3x$	<b>38</b>	$\frac{2x^3 - 3x^2}{5} - 1$
<b>29</b>	$\left(\frac{x+2}{x-5}\right)^2 + 3x^3$	<b>39</b>	$7x^3 - 4x^2 + 3$
<b>30</b>	$\frac{(x+6)^3}{(x-3)^2} + x$	<b>40</b>	$\frac{6x^3 - x^2}{2x + 1} + 3$

### Задание 2. Решение нелинейного уравнения

Решить нелинейное уравнение, используя функции *root*, *polyroots*, *Find*, программирование. Построить график функции и показать найденные корни. Данные взять из табл. 2.

Таблица 2

Вариант	Уравнение	Вариант	Уравнение
1	$x^3 + 3x - 2 \cdot e^{-x}$	21	$\sin(x - 0.2) = -0.1 \cdot x + 0.2$ интервал $(-\pi, 2\pi)$
2	$2x^2 + \cos(x) - 3$	22	$\sin(2 \cdot x) + 0.5 = x^2$
3	$2x^2 + \ln(x + 5) = 5$	23	$\log(0.01 + x) + \frac{0.01}{x^2} = 0.5$
4	$3 \cdot x^2 = \cos(\pi x)^2$	24	$\frac{\pi}{8} \cdot x + \cos(x) = \frac{\pi}{4}$ интервал $(-\pi, \pi)$
5	$2 \cdot x = 1.5^x$	25	$e^x + x^2 - 1 = 0$
6	$x - \log(x) = 1$	26	$\cos\left(\pi \cdot x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \cdot x$
7	$5 \cdot x - 2 \cdot \ln(x) = 8$	27	$(x - 2)^x = 3 \cdot x^3$
8	$8 \cdot \sqrt{x} - e^x = 1$	28	$\sqrt[3]{x^2 - 4} = 2$
9	$x^3 \cdot (x - 3)^2 = 4x^7$	29	$x^2 = 0.3 \cdot x + \cos(-x)$
10	$4x^3 - (x - 2)^4 - 3x^5$	30	$e^{-0.3x} - \sqrt[3]{x + 4} + x = 0$
11	$4 \cdot x = \sqrt{\log(x + 2)}$	31	$0.2 - 6 \cdot x^3 - \ln(2 \cdot x) = 0$
12	$4^x = 6 \cdot x$	32	$x^3 - (\ln(x) + 3)^3$
13	$2 \cdot x^2 + \cos(x) = 7$	33	$x^{2x-7} - 13 = 0$
14	$(x - 1)^4 = 3x^3$	34	$2 \cdot x^4 - \sqrt[3]{\cos(0.5 \cdot x)} = 0$
15	$-0.5 \cdot x^2 + \log(x) = -1$	35	$e^{x-1} = x + 1$
16	$4x^5 - \sqrt[3]{(x-3)} = 12x^2$	36	$3x^5 - 2.5x^3 + 3x^2 - 4x = 6$
17	$6x^5 - 1.25x^2 + 9x^4 = 1$	37	$(2x - 5)^5 - 0.9x^3 + 3x^2 = 4$
18	$7x^6 - 3.2x^3 + 2x = \frac{2}{x} + 24$	38	$(3x - 5)^4 - x^3 + 3x^2 - 4 = 0$
19	$(2x + 3)^3 + (x - 1)^4 = 16$	39	$(3x)^5 - 4 \cdot (x - 2)^3 + 2 \cdot x^4 = 32$
20	$(x + 5)^3 + (x - 1)^4 = (8x)^2$	40	$x - 5x^6 + 3x^3 - 7x^2 = 0$

Задание 3. Решение системы линейных уравнений

Решить систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными, используя матричный метод и функцию *Lsolve*, метод Крамера, а также вычислительный блок Given – Find. *N* – номер варианта (1...40)

Система четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

Таблица 3

A	$-0.18 \cdot N \cdot x_1 + 0.97 \cdot N \cdot x_3 + 2.32 \cdot N \cdot x_2 + 0.835 \cdot N \cdot x_4 = 0.842 + 0.1 \cdot N$ $-4.15 \cdot N \cdot x_2 - 4 \cdot N \cdot x_3 - 5.135 \cdot N \cdot x_1 - 3.135 \cdot N \cdot x_4 = 0.54 + 0.2 \cdot N$ $0.217 \cdot N \cdot x_4 + 1.21 \cdot N \cdot x_1 + 0.5 \cdot N \cdot x_3 - 0.025 \cdot N \cdot x_2 = -0.41 + 0.05 \cdot N$ $3.03 \cdot N \cdot x_3 + 0.516 \cdot N \cdot x_1 + 1.68 \cdot N \cdot x_2 = 0.91 - 0.15 \cdot N$
B	$2.26 \cdot N \cdot x_1 + 4.76 \cdot N \cdot x_2 + 2.78 \cdot N \cdot x_4 + 2.96 \cdot N \cdot x_3 = 0.909 + 0.05 \cdot N$ $-1.68 \cdot N \cdot x_4 - 2 \cdot N \cdot x_3 - 2.68 \cdot N \cdot x_1 - 2.2 \cdot N \cdot x_2 = -0.416 + 0.15 \cdot N$ $-0.46 \cdot N \cdot x_1 - 1.7 \cdot N \cdot x_2 - 0.96 \cdot N \cdot x_4 = -0.654 + 0.02 \cdot N$ $-0.96 \cdot N \cdot x_3 - 1.3 \cdot N \cdot x_4 - 0.22 \cdot N \cdot x_1 - 2.76 \cdot N \cdot x_2 = -0.757 + 0.1 \cdot N$
C	$9.68 \cdot N \cdot x_2 + 6.21 \cdot N \cdot x_4 + 6.53 \cdot N \cdot x_3 = -0.959 + 0.15 \cdot N$ $1.315 \cdot N \cdot x_1 - 0.8 \cdot N \cdot x_3 - 1.115 \cdot N \cdot x_2 - 0.915 \cdot N \cdot x_4 = 0.284 + 0.05 \cdot N$ $2.692 \cdot N \cdot x_4 + 2.49 \cdot N \cdot x_1 + 4.325 \cdot N \cdot x_2 + 3.1 \cdot N \cdot x_3 = 0.839 + 0.12 \cdot N$ $5.73 \cdot N \cdot x_3 + 2.15 \cdot N \cdot x_4 + 5.015 \cdot N \cdot x_1 + 8.88 \cdot N \cdot x_2 = 0.544 - 0.01 \cdot N$

Задание 4. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Найти численно решение линейного однородного уравнения второго порядка  $y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0$  с начальными условиями (задача Коши).

Изобразить график решения и табличный вывод для  $x$ ,  $y$ ,  $y'$ . Данные взять из таблицы 4.

Таблица 4

№	<i>a1</i>	<i>a2</i>	<i>y(x0)</i>	<i>y'(x0)</i>	<i>x0</i>	<i>xk</i>
1	2	0	1	1	0	5
2	-4	4	0	1	-0.75	5
3	2	1	5	0	2	7
4	0	1	3	0	-2	3
5	2	5	8	0	1	6
6	-3	4	1	1	0.3	6

Окончание табл. 4

$N_0$	$a1$	$a2$	$y(x_0)$	$y'(x_0)$	$x_0$	$x_k$
7	6	13	-1	1	0.25	5
8	-8	1	4	1	3	8
9	-2	5	6	2	-4	1
10	-4	8	0	2	1.5	6
11	2	3	0	2	0.2	5
12	-3	4	-1	0.5	2.5	8
13	3	1	1	1	6	11
14	5	5	4	-0.5	-3	2
15	6	10	5	2	0.8	6
16	-4	6	0	0.5	0.75	6
17	2	-3	1	1	-1.2	5
18	-4	12	-1	0	4	9
19	6	9	-2	2	1.75	7
20	4	1	8	0.5	0.35	6
21	0	-1	1	0	-2.5	3
22	-5	4	1	1	0.35	6
23	5	-1	2	0	0.6	6
24	-1	1	1	0	0.5	6
25	7	2	2	0	3.2	9
26	-4	3	6	10	0.1	5
27	4	29	0	15	10	15
28	2	8	1	-2	8	13
29	4	-3	2	4	1	6
30	1	0.25	2	0	9	14
31	9	0.5	6	3	7	12
32	-9	2	4	5	2	7
33	14	7	2	3	5	10
34	-10	4	5	5	1.7	7
35	2	3	6	4	5	10
36	-4	7	9	-2	4	9
37	5	-6	8	-1	0	5
38	12	-8	3	-9	2	7
39	1	5	-6	4	-3	2
40	3	2	1	0	-2	3

*Задание 5.* Расчет на прочность статически определимой балки при плоском поперечном изгибе

*Цель работы:* применить полученные навыки в программировании, составлении матриц, построении графиков на примере вычисления внутренних усилий в балке, построении их графических зависимостей (эпюр) и вычислении максимального значения изгибающего момента для выполне-

ния расчета на прочность. Согласно условию прочности подобрать двутавровое сечение балки. Номер сечения двутавра взять из приложения 3.

Индивидуальное задание взять из таблицы 5 согласно номеру варианта, выданному преподавателем. Схема загрузки балки дана на рис. П1.1.

Пример выполнения задания помещен в приложении 2.

Таблица 5

№ вар	№ схемы	F (кН)				q (кН/м)			M (кН·м)				L (м)		
		f1	f2	f3	f4	q1	q2	q3	m1	m2	m3	m4	L1	L2	L3
1	1	-	15	-	-5	-	-	14	-	-	16	-	1.2	0.9	1.0
2	2	-	-16	-	-	-	24	-	12	-	-	-9	1.7	0.6	1.2
3	3	20	-	-	16	-13	-	-	-	-	-10	-	0.9	1.3	0.6
4	4	-	-	-18	-	-	8	-	16	-	-9	-	0.8	1.4	0.9
5	5	-	-12	22	-	-	-	9	-	-	8	-	0.6	1.5	1.1
6	1	-	-	-	20	-	-10	-	-	-11	7	-	0.9	1.7	0.6
7	2	-	13	-	-14	-	-	11	-	-	8	-	1.4	0.8	1.0
8	3	21	-	-	-	-	-	-12	11	-	-	7	1.3	0.7	1.2
9	4	-19	-	10	-	-	-	13	-	-	6	-	1.2	0.8	0.9
10	5	-	14	-	-	16	-	-	-12	-	19	-	1.3	0.6	1.0
11	1	-	-	-17	-	15	-	-	-	12	-	-9	1.2	0.6	0.9
12	2	-	-	-	22	-	-	16	-18	-	5	-	1.3	0.8	0.8
13	3	-22	-	-	14	-	-	15	7	-	-	-	0.6	1.3	0.9
14	4	14	-	-17	-	-14	-	-	-	-	13	-	0.7	1.4	0.6
15	5	-	25	-12	-	-	-	13	-	-	18	-	1.4	0.8	1.1
16	1	-	-23	18	-	12	-	-	-	-	-	13	1.5	0.7	0.9
17	2	-	-18	-	-	-	13	-	-	-	20	-12	0.9	0.5	1.2
18	3	11	-	-	9	-	-10	-	-	-	12	-	1.1	0.8	0.6
19	4	-	-	24	-	-	-	9	-11	-	5	-	1.2	0.7	0.8
20	5	-	-17	22	-	-15	-	-	-	-	-	-16	0.9	0.35	0.5
21	1	-	-18	-	-	-	-	-16	-	-	-8	11	0.7	1.4	0.9
22	2	-	15	-	9	-14	-	-	-20	-	-	-	1.3	0.7	1.1
23	3	-17	-	-	-16	-	-	15	9	-	-	-	1.1	0.6	1.0
24	4	-21	-	15	-	-	-	-12	-	-	-	10	1.4	0.7	1.2
25	5	-	-	-18	-	-	21	-	-	-12	-	8	1.3	0.8	1.0
26	1	-	11	-24	-	-	-	-20	-	-	18	-	1.4	0.9	0.8
27	2	-	-	-	-22	-	-17	-	16	-	-	6	1.6	0.5	1.3
28	3	12	-	-	-18	8	-	-	-	15	-	-	1.3	0.8	1.1
29	4	19	-	-	-	-	-16	-	-	-	8	-13	0.8	0.6	1.2
30	5	-	24	-	-	-	-	-12	-7	-	15	-	1.5	0.7	1.2
31	1	-	-	-17	-21	-	23	-	-	-15	-	-	1.35	1.1	0.9
32	2	-	20	-	-	-	-	-9	-	9	-	-14	1.45	0.6	1.2
33	3	-18	-	-	-	-	14	-	-	-	-8	16	1.25	0.85	0.6
34	4	15	-	-12	-	-18	-	-	-	-	-	5	1.35	0.75	0.9
35	5	-	20	-9	-	-	-20	-	14	-	-	-	0.9	0.35	0.5
36	1	-	-13	-	-25	-	20	-	-	-	-	-16	0.8	1.9	1.4
37	2	-	-16	-	-	-	-	12	18	-	-10	-	1.6	0.7	1.3
38	3	20	-	-	-12	-	-	7	-	-	10	-	1.1	1.3	0.8
39	4	-	-	-18	-	-	-	8	12	-	9	-	1.35	0.8	0.9
40	5	-	-12	22	-	-	-	9	-	-	8	-	1.5	1.0	0.6

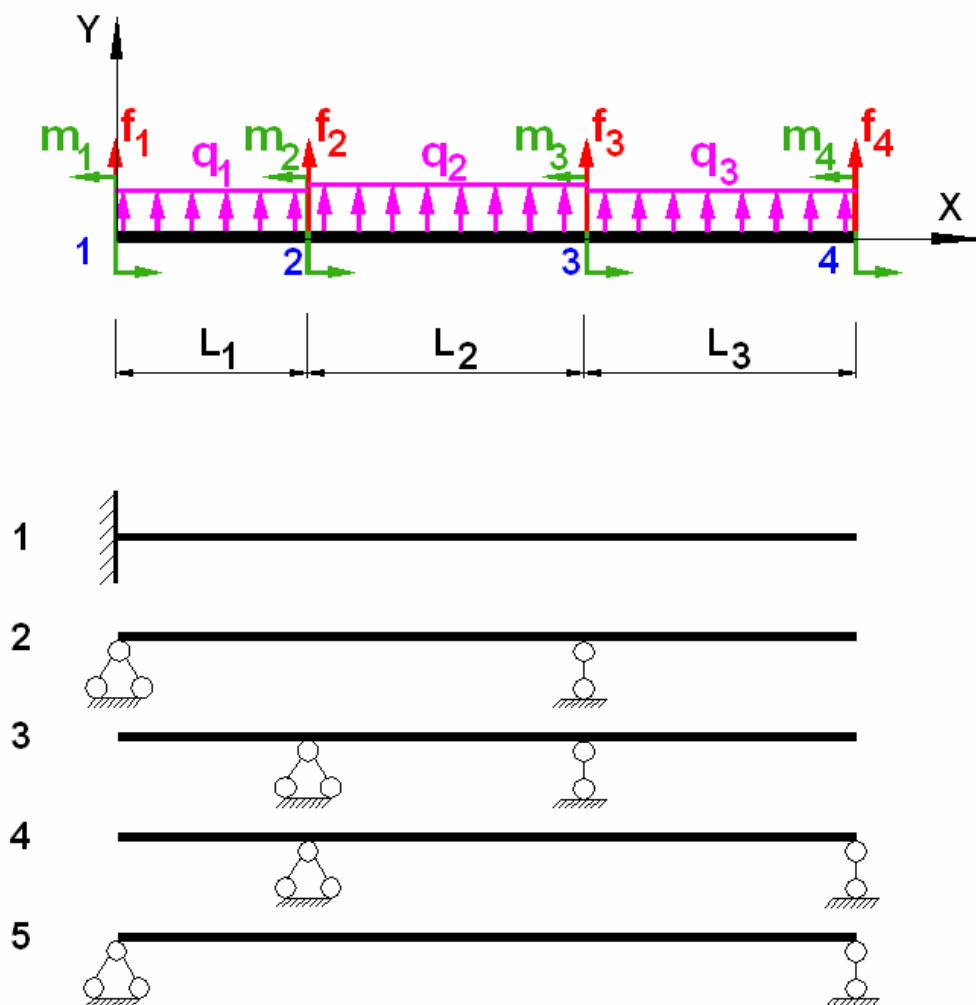


Рис. П1.1

*Указания к выполнению задания*

- Все внешние нагрузки задать в матричном виде, используя математическое правило знаков при учете направления нагрузки. Знак «-», стоящий в таблице перед значением нагрузки, означает, что ее направление в схеме противоположное.
- Вычислить опорные реакции
- Составить функции-программы для нахождения поперечных сил и изгибающих моментов
- Построить, используя полученные аналитические зависимости, эпюры поперечных сил и изгибающих моментов
- Подобрать двутавровое сечение балки из расчета на прочность, предварительно определив максимальное значение изгибающего момента.

Примеры решений

Пример 1. Исследование функции

1. Дана функция:

$$f(x) := \sqrt[3]{6x^2 - x - 5}$$

График функции в общем виде построен на рис. П2.1

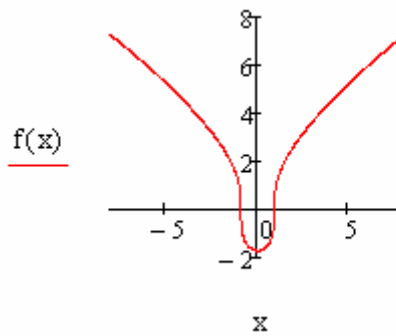


Рис. П2.1

2. Область определения функции:

$$-\infty < x < \infty$$

функция определена на всей числовой оси  $x$  и разрывов не имеет.

3. Корни функции

$$f(x) = 0 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$f(0) = -1.71$$

Корни на графике отмечены маркерами (рис. П2.2).

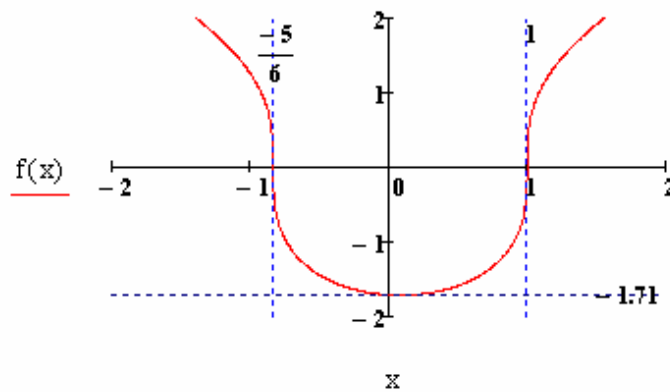


Рис. П2.2



#### 4. Исследование функции на экстремальные значения.

Найдем производную первого порядка:

$$\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow \frac{12 \cdot x - 1}{3 \cdot \sqrt[3]{(6 \cdot x^2 - x - 5)^2}}$$

Введем новую функцию для обозначения производной:

$$f1(x) := \frac{12 \cdot x - 1}{3 \cdot \sqrt[3]{(6 \cdot x^2 - x - 5)^2}}$$

*Примечание.* Во избежание ошибочных решений при подстановке конкретных значений аргумента (могут появиться комплексные числа), замените в знаменателе дробную степень радикалом.

Найдем критические точки производной (для удобства переведем результат в десятичный формат):

$$f1(x) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve} \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow 0.0833 \quad 3 \cdot \sqrt[3]{(6 \cdot x^2 - x - 5)^2} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve} \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 \\ -0.833 \end{pmatrix}$$

$x1 = -0.833$  (точка разрыва производной),

$x2 = 0.0833$  (корень производной),

$x3 = 1.0$  (точка разрыва производной).

Расположив все критические точки по порядку на числовой оси  $x$ , исследуем их на максимум / минимум функции:

$$f1(-1) = -2.73 \quad x1 \text{ не является экстремумом}$$

$$f1(-0.5) = -1.122 \quad x2 \text{ является минимумом}$$

$$f1(0.5) = 0.661 \quad x3 \text{ не является экстремумом}$$

$$f1(2) = 1.16$$

В окрестности  $x2 = 0.0833$  производная меняет знак с "-" на "+", следовательно, в точке  $x = 0.0833$  функция имеет минимум (рис. П2.3).

Таким образом, функция имеет два участка возрастания/убывания:  
на интервале  $-\infty < x < 0.0833$  производная  $< 0$ , функция убывает;  
 $0.0833 < x < \infty$  производная  $> 0$ , функция возрастает.

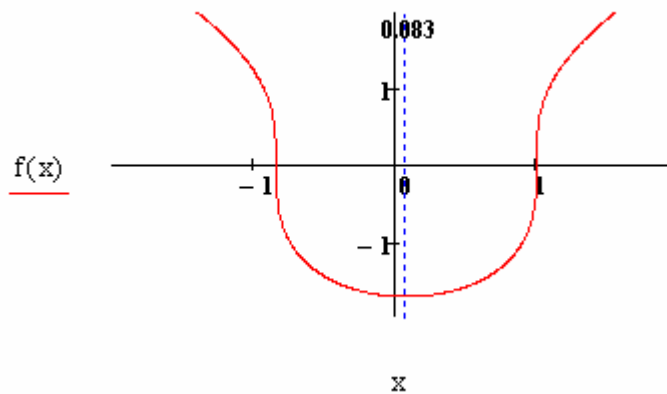


Рис. П2.3

5. Исследование функции на выпуклость / вогнутость и точки перегиба.  
Найдем производную второго порядка:

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) \text{ simplify} \rightarrow -\frac{2 \cdot (36 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 91)}{9 \cdot (6 \cdot x^2 - x - 5)^{\frac{5}{3}}}$$

Введем новую функцию для обозначения производной:

$$f2(x) := -\frac{2 \cdot (36 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 91)}{9 \cdot \sqrt[3]{(6 \cdot x^2 - x - 5)^5}}$$

Найдем критические точки производной второго порядка:

$$f2(x) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve} \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 0.0833 + 1.59i \\ 0.0833 - 1.59i \end{pmatrix} \quad 9 \cdot \sqrt[3]{(6 \cdot x^2 - x - 5)^5} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve} \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 \\ -0.833 \end{pmatrix}$$

Производная не имеет корней, однако не определена (имеет разрыв) в точках:

$$x1 = -0.833, \quad x2 = 1.0$$

Исследуем  $x1$  и  $x2$  на возможные точки перегиба функции:

$$f2(-1) = -9.309 \quad x1 \text{ является точкой перегиба}$$

$$f2(0) = 1.383 \quad x2 \text{ является точкой перегиба}$$

$$f2(2) = -0.441$$

Получим три интервала выпуклости/вогнутости функции:

функция выпукла при  $x < -0.833$  и при  $x > 1$ ;

функция вогнута при  $-0.833 < x < 1$  (рис. П2.4).

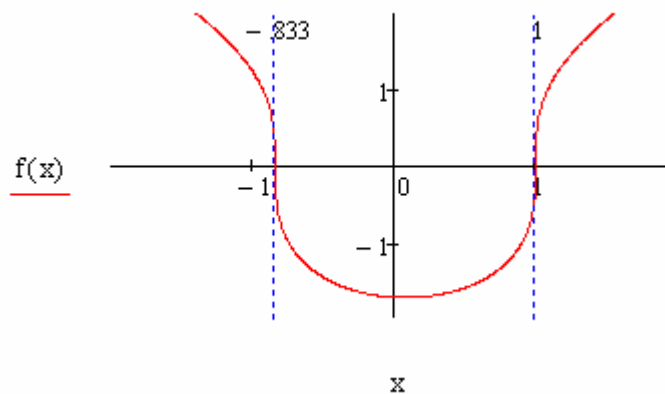


Рис. П2.4

### Пример 2. Решение нелинейных уравнений

Дано уравнение:  $e^x - x^3 = 0$

Задаем функцию:  $f(x) := e^x - x^3$

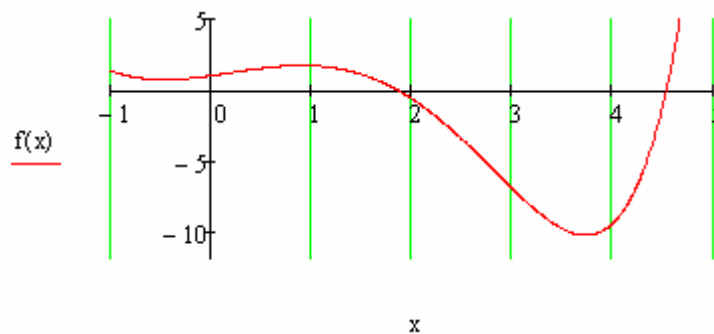


Рис. П2.5

1. *Решение функцией root.* На графике (рис. П2.5) определяем интервалы аргумента, внутри которых функция обращается в ноль.

$$\text{root}(f(x), x, 1, 2) = 1.857$$

$$\text{root}(f(x), x, 4, 5) = 4.536$$

Корни уравнения:  $x_1 = 1.857$ ,  $x_2 = 4.536$

2. *Решение блоком Given – Find и функцией polyroots:*

$$x := 1$$

Given

$$e^x - x^3 = 0$$

$$x0 := \text{Find}(x)$$

$$x0 = 1.857$$

Уравнения – полиномы решаются в этом пункте функцией *polyroots*. Необходимо составить вектор коэффициентов от низшего  $a_0$  при  $x^0$  до высшего  $a^n$  при  $x^n$  при помощи команды *coeffc* (панель *symbolic*). Отсутствующие показатели степеней будут в векторе коэффициентов равны нулю. Для вывода коэффициентов командой *coeffc* необходимо записать только левую часть уравнения. Пример нахождения корней для уравнения

$$2x - (2x)^5 + 3x^3 - 7x^2 = 0$$

$$2x - (2x)^5 + 3x^3 - 7x^2 \text{ coeffs} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -7 \\ 3 \\ 0 \\ -32 \end{pmatrix} \quad v := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -7 \\ 3 \\ 0 \\ -32 \end{pmatrix} \quad \text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -0.72 \\ 0 \\ 0.215 - 0.504i \\ 0.215 + 0.504i \\ 0.29 \end{pmatrix}$$

### 3. Решение методом половинного деления

$$D(f, a, b) := \begin{cases} \text{while } \left| \frac{a-b}{2} \right| > \text{TOL} \\ \quad \left| \begin{array}{l} x1 \leftarrow \frac{a+b}{2} \\ b \leftarrow x1 \text{ if } f(x1) \cdot f(a) < 0 \\ a \leftarrow x1 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \quad x \leftarrow x1 \end{cases}$$

$$D(f, 0, 2) = 1.857$$

$$D(f, 3, 6) = 4.537$$

Составим программу (функция  $f(x)$  задается вне программы):

### 4. Решение методом Ньютона (функция $f(x)$ задается вне программы):

$$\text{Newton}(f, x) := \begin{cases} x1 \leftarrow x + 2 \cdot \text{TOL} \\ \text{while } |x1 - x| > \text{TOL} \\ \quad \left| \begin{array}{l} x \leftarrow x1 \\ x1 \leftarrow x - \frac{f(x)}{\frac{d}{dx} f(x)} \end{array} \right. \end{cases}$$

На графике искомой функции необходимо показать найденные корни (рис. П2.6).

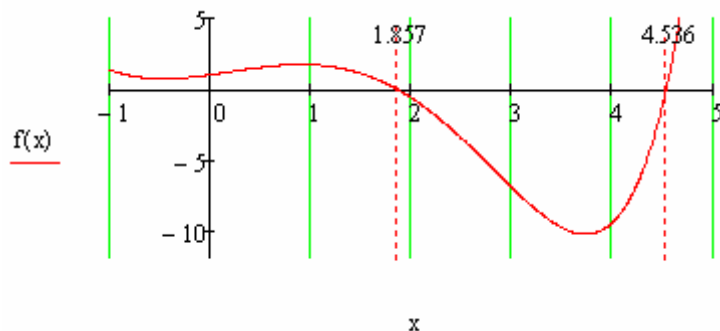


Рис. П2.6

### Пример 3. Решение системы линейных уравнений

Дана система четырех уравнений с четырьмя неизвестными  $x_1, x_2, x_3, x_4$ :

$$2 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_2 - 2.7 \cdot x_3 + 9.2 \cdot x_4 = 6$$

$$x_1 - 1.6x_2 + 0.6x_3 - 0.7x_4 = 2$$

$$3x_1 + 1.5x_2 + 8.5x_3 + 4.2x_4 = -3$$

$$-5.2x_1 + 6x_2 + 3.4x_3 - 5x_4 = 2.5$$

Формируем матрицу системы  $A$  и матрицу правой части  $B$ :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & -2.7 & 9.2 \\ 1 & -1.6 & 0.6 & -0.7 \\ 3 & 1.5 & 8.5 & 4.2 \\ -5.2 & 6 & 3.4 & -5 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \\ 2.5 \end{pmatrix} \quad |A| = -78.723$$

Задаем системную переменную  $ORIGIN:=1$

Нахождение неизвестных по формуле матричной записи системы:

$$x := A^{-1} \cdot B \quad x = \begin{pmatrix} -31.075 \\ -22.227 \\ 8.978 \\ 11.25 \end{pmatrix}$$

Нахождение неизвестных по методу Крамера.

Для вычисления неизвестных составим алгоритм:

```

Kram(A,B) := if cols(A) = rows(A)
              | for i ∈ 1..cols(A)
              |   | C ← A
              |   | C(i) ← B
              |   | if |A| ≠ 0
              |   |   | xi ←  $\frac{|C|}{|A|}$ 
              |   |   | i ← i + 1
              |   | return "Нет корней: матрица сингулярная" otherwise
              | x
              | return "Нет корней: матрица неквадратная" otherwise

```

$$\text{Kram}(A,B) = \begin{pmatrix} -31.075 \\ -22.227 \\ 8.978 \\ 11.25 \end{pmatrix}$$

## Нахождение функцией **Lsolve**

$$x := \text{lsolve}(A,B) \quad x = \begin{pmatrix} -31.075 \\ -22.227 \\ 8.978 \\ 11.25 \end{pmatrix}$$

## Проверка решения блоком **Given – Find**

Given

$$2 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_2 - 2.7 \cdot x_3 + 9.2 \cdot x_4 = 6$$

$$x_1 - 1.6x_2 + 0.6x_3 - 0.7x_4 = 2$$

$$3x_1 + 1.5x_2 + 8.5x_3 + 4.2x_4 = -3$$

$$-5.2x_1 + 6x_2 + 3.4x_3 - 5x_4 = 2.5$$

$$\text{Find}(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow \begin{pmatrix} -31.075 \\ -22.227 \\ 8.9781 \\ 11.250 \end{pmatrix}$$

*Пример 4. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка*

Дано уравнение:

$$y''(x) + a_1 \cdot y'(x) + a_2 \cdot y(x) = 0$$

начальные условия:

$$x_0 := 1 \quad y_0(x_0) := 6 \quad y_0'(x_0) := 2$$

интервал интегрирования  $(x_0, x_k)$ , где  $x_k := 6$

количество точек интегрирования

$$N := 100$$

шаг интегрирования

$$h := \frac{x_k - x_0}{N}$$

Значения аргумента  $x$  задаем ранжированной переменной

$$x := x_0, x_0 + h .. x_k$$

Для численного решения используем две функции: `odesolve` и `rkfixed`.

Задаем системную переменную `ORIGIN:=1`

**1. Функция *odesolve***

**Given**

$$z''(x) + a_1 z'(x) + a_2 z(x) = 0$$

$$z(x_0) = y_0(x_0)$$

$$z'(x_0) = y_0'(x_0)$$

$$t := \text{odesolve}(x, x_k)$$

Построим график функции (рис. П2.7):

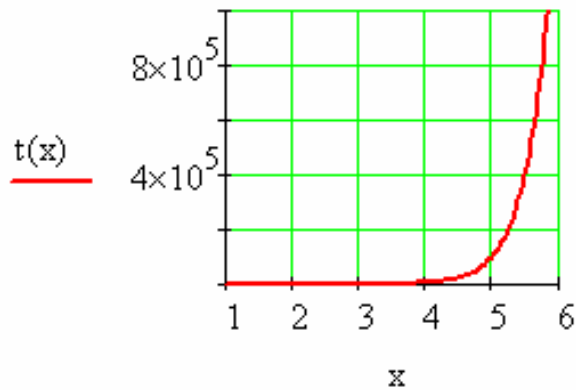


Рис. П2.7

Вывод численного решения функцией Odesolve можно представить в виде матрицы-вектора, если предварительно составить функцию-программу

```

od(x0 , xk , N , f) :=
  x ← x0
  h ← (xk - x0) / N
  for i ∈ 1.. N
    odi ← f(x)
    x ← x + h
  od
  
```

Здесь  $x_0$ ,  $x_k$  – интервал интегрирования,  $N$  – количество точек,  $f$  – функция, заданная в вычислительном блоке Odesolve (в нашем примере функция задана символом  $t$ ). Для табличного вывода зададим вектор

$t1 := od(x_0, x_k, N, t)$

## 2. Функция *rkfixed*

Для формирования параметров функции необходимо составить вектор начальных условий  $y$  и дифференциальное выражение  $D(x, y)$ .

Вектор начальных условий:

$$y := \begin{pmatrix} y_0(x_0) \\ y_0'(x_0) \end{pmatrix}$$

Дифференциальное выражение:

$$D(x, y) := \begin{pmatrix} y_2 \\ -a_1 y_2 - a_2 y_1 \end{pmatrix}$$



Функция rkfixed:

$t2 := \text{rkfixed}(y, x0, xk, N, D)$

	1	2	3
1	1	6	2
2	1.05	6.121	2.847
3	1.1	6.286	3.799
4	1.15	6.503	4.87
5	1.2	6.776	6.08
6	1.25	7.113	7.448
7	1.3	7.524	9
8	1.35	8.017	10.763
9	1.4	8.604	12.768
10	1.45	9.298	15.05

Решение функция выдает в матричной форме, первый столбец которой является аргументом  $x$ , второй – функцией  $y(x)$ , третий – производной первого порядка  $y'(x)$ . Для представления функции в графической форме следует задать в качестве аргумента значения первого столбца  $t2^{<1>}$ , в качестве функции значения второго столбца  $t2^{<2>}$ .

### 3. Сравнительный анализ полученных результатов

- в табличной форме:

$x =$		1	2	3
1	1	6	2	
1.05	2	6.121	2.847	
1.1	3	6.286	3.799	
1.15	4	6.503	4.87	
1.2	5	6.776	6.08	
1.25	6	7.113	7.448	
1.3	7	7.524	9	
1.35	8	8.017	10.763	
1.4	9	8.604	12.768	
1.45	10	9.298	15.05	
1.5	11	10.114	17.652	
1.55	12	11.07	20.62	
1.6	13	12.183	24.009	
1.65	14	13.478	27.881	
1.7	15	14.981	32.306	

Табличный вывод (первые 15 значений) показывает, что оба способа решения имеют сходные результаты.

- в графической форме:

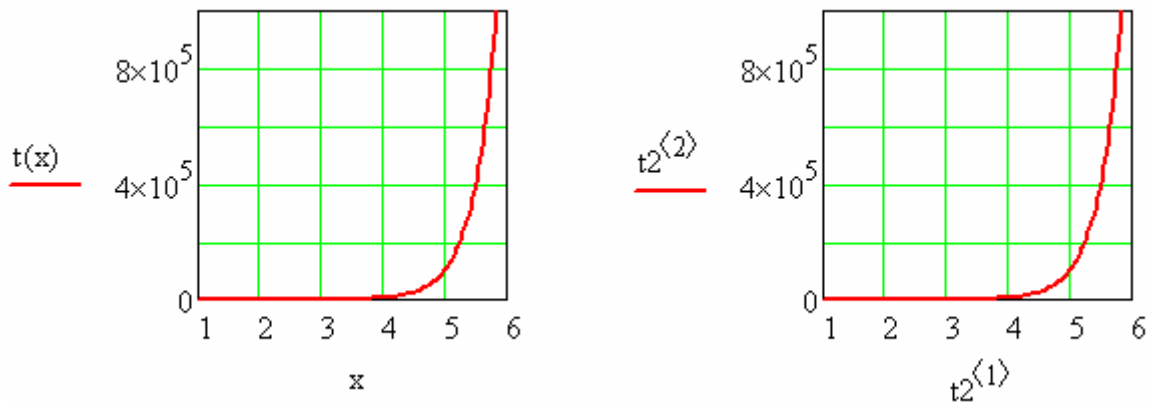


Рис. П2.8

Очевидно, что полученные графики (рис. П2.8) идентичны.

*Пример 5. Расчет на прочность статически определимой балки при плоском поперечном изгибе*

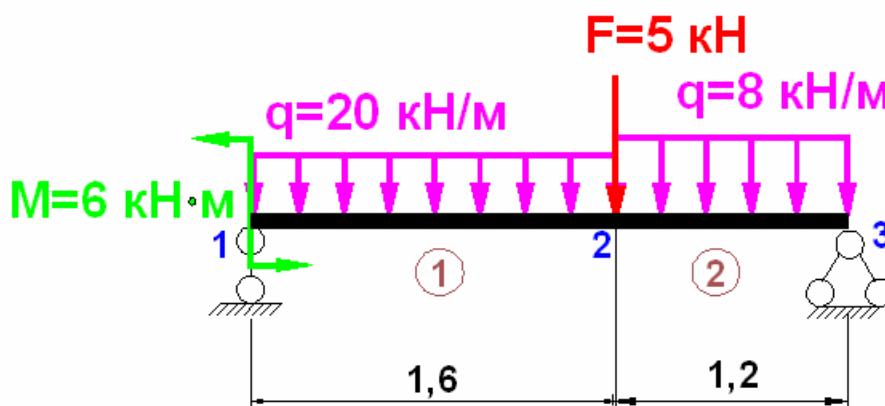


Рис. П2.9

### 5.1. Ввод начальных данных

Системная переменная ORIGIN:=1

количество участков балки

**nu:=2**

количество характерных сечений

**ns:=3**

расчетное сопротивление  $R:=2 \cdot 10^8$  Па

внешние нагрузки и длина участков

$$q := \begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix} \frac{\text{кН}}{\text{м}} \quad f := \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{кН} \quad m := \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{кН} \cdot \text{м} \quad L := \begin{pmatrix} 1.6 \\ 1.2 \end{pmatrix} \text{м}$$

координаты сечений

$$LX := \begin{cases} LX_1 \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..nu \\ \quad LX_{i+1} \leftarrow LX_i + L_i \\ LX \end{cases} \quad LX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \\ 2.8 \end{pmatrix}$$

## 5.2. Определение реакций в опорах

Given

$$\sum_{i=1}^{ns} m_i + \sum_{i=1}^{ns} (f_i \cdot LX_i) + \sum_{i=1}^{nu} \left[ q_i \cdot \frac{(LX_{i+1})^2 - (LX_i)^2}{2} \right] + R1 \cdot LX_1 + R3 \cdot LX_3 = 0$$

$$R1 + R3 + \sum_{i=1}^{ns} f_i + \sum_{i=1}^{nu} (q_i \cdot L_i) = 0$$

$$\text{Find}(R1, R3) \rightarrow \begin{pmatrix} 29.2 \\ 17.4 \end{pmatrix}$$

Формируем вектор реакций  $\mathbf{R}_s$  и суммарный вектор сосредоточенных внешних сил  $\mathbf{f}_s$ :

$$\mathbf{R}_s := \begin{pmatrix} 29.2 \\ 0 \\ 17.4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}_s := \mathbf{R}_s + \mathbf{f} \quad \mathbf{f}_s = \begin{pmatrix} 29.2 \\ -5 \\ 17.4 \end{pmatrix}$$

*Примечание.* Для консольной балки составить уравнения равновесия и найти момент и реакцию заделки. Составить вектор внешних моментов, включив найденный реакционный момент, и вектор внешних сил, включив найденную опорную реакцию заделки.

### 5.3. Определение внутренних усилий

Для определения внутренних усилий составим функции-программы, позволяющие получить зависимости для каждого участка. При составлении зависимостей учитываем, что длина каждого участка будет отсчитываться от начала координат оси X (т.е. от сечения 1).

- поперечные силы:

$$Q_y(n, x) := \begin{cases} f_{s1} + q_1 \cdot x & \text{if } n = 1 \\ \sum_{i=1}^n f_{si} + \sum_{i=1}^{n-1} (q_i \cdot L_i) + q_n \cdot (x - LX_n) & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

Параметр  $n$  определяет номер участка, параметр  $x$  – координату расчетного сечения участка.

Получим выражения поперечных сил на каждом участке и значения в характерных сечениях:

$$Q_y(1, x) \rightarrow 29.2 - 20 \cdot x \quad Q_y(2, x) \rightarrow 5.0 - 8 \cdot x$$

$$Q_y(1, LX_1) = 29.2 \quad Q_y(1, LX_2) = -2.8$$

$$Q_y(2, LX_2) = -7.8 \quad Q_y(2, LX_3) = -17.4$$







